

21 世紀 南山の経済学

「高校生のための数学入門」

練習問題

ページ数の都合でブックレットには載せることのできなかった練習問題を紹介します。ブックレットで紹介したように、高校生の間は教科書の問題を何度も繰り返すのが一番だと思いますが、せっかくだから他の問題にもチャレンジしてみたいという人は是非下記の問題にも取り組んでみてください。

2 関数 (1)

2.1 ある人の生活パターンを観察すると、次の特徴を発見できた。

- 消費額 (C) は所得 (Y) に依存して決まる。
- 仮に所得がゼロであっても月々 4 万円の消費をする。
- 所得が 1 万円増えるごとに、消費額は 8 千円増える。

- (1) この人の消費 C を所得 Y の一次関数として表せ。
- (2) 所得を横軸、消費を縦軸にとり、消費関数を図に描け。

2.2 ある国には 2 種類の税が存在する。ひとつは人頭税で、成人であれば誰でも 1 人あたり 10 の納税をしなくてはならない。もうひとつは比例所得税で、所得の 20% を納めなくてはならない。

- (1) この国の成人が納める税額 (T) と所得 (Y) の関係を表す式を求めよ。
- (2) 所得を横軸, 納税額を縦軸にとり, 納税関数を図に描け。
- (3) ある人の所得が 100 であるとき, この人の納税額はいくらか。
- (4) ある人の納税額は 60 である。この人の所得はいくらか。

2.3 スーパーの店長がある商品の価格 (p) と販売量 (x) をチェックしたところ次のような組み合わせになっていた。

- 価格が 100 円の時には 1 日あたり 10 個売れた。
 - 価格を 80 円にすると 1 日あたり 20 個売れた。
- (1) 経験的に価格と販売量は一次関数で表されるらしいということはわかっている。このとき, x を p の関数で表せ。
 - (2) 価格を 60 円まで下げたら, 何個の販売を見込めるか。
 - (3) 最低でも 25 個の販売をしたいとき, 価格をいくら以下に引き上げる必要があるか。

3 関数 (2)

3.1 あるブランド品を作っている企業がある。この企業が財を生産するのに, 1 個あたり 10 の費用が必要であるとしよう。また, この企業が生産量を増やすと財の希少価値が落ちるため, 生産量 (x) の増加に応じて価格が下がるとする。その傾向は次の関数で表される。

$$p = 70 - 2x$$

- (1) この企業の利潤 (π) を生産量の関数として表せ。
- (2) 利潤を最大にするには, 生産量をいくつにすればよいか。

3.2 ある企業が財を x 個生産すると, $C = x^2 + 2x$ という費用が発生する。この財の価格が $p = 20$ で固定されているとして, 下記の問いに答えよ。

- (1) この企業の利潤 (π) を生産量の関数として表せ。
- (2) 利潤を最大にするには, 生産量をいくつにすればよいか。

4 連立方程式

4.1 ある財の需要量 (x_D) と供給量 (x_S) が次のように価格 (p) の関数として与えられているとしよう。

$$\text{需要: } x_D = 60 - \frac{2}{3}p$$

$$\text{供給: } x_S = \frac{1}{2}p - 10$$

- (1) 縦軸が価格, 横軸が量を表す平面に需要曲線と供給曲線を描け。
- (2) 価格が 72 のとき ($p = 72$), この市場では財が余るか, それとも不足するか。
- (3) 価格がいくらになれば, この市場での需要と供給が一致するか。

4.2 ある財の需要量 (x_D) と供給量 (x_S) が次のように価格 (p) の関数として与えられているとしよう。

$$\text{需要: } x_D = 15 - \frac{1}{2}p$$

$$\text{供給: } x_S = \sqrt{2p}$$

- (1) 縦軸が価格, 横軸が量を表す平面に需要曲線と供給曲線を描け。
- (2) 価格が 8 のとき ($p = 8$), この市場では財が余るか, それとも不足するか。
- (3) 価格がいくらになれば, この市場での需要と供給が一致するか。

4.3 ある人の現在の収入は 300 万円であり，過去の傾向を見るとこれから毎年 12 万円ずつ増えていくと予想される。それに対して支出は今のところ 140 万円であるが，今後，結婚，出産などを控えているので毎年 20 万円ずつ増加する予定である。

- (1) x 年後の収入 (I) と支出 E をそれぞれ式で表せ。
- (2) この傾向が続いたときに，支出が収入に追いつくのは何年後か。計算せよ。

5 指数・対数

5.1 A 国と B 国という 2 つの国があり，それぞれの国民所得は，A 国が 100，B 国が 400 であるとする。また現段階で A 国は 7% ，B 国は 1% で経済成長しており，この状態は長期にわたって続くものとする。

- (1) 10 年後に A 国の国民所得はいくらになっているか。
- (2) A 国の国民所得が B 国の国民所得を追い抜くのは何年後か。

なお， $1.07^{10} = 1.97$ ， $\log_{10} 1.01 = 0.0043$ ， $\log_{10} 1.07 = 0.0294$ ， $\log_{10} 4 = 0.6021$ とすること。

5.2 銀行に年 3% の金利で 100 万円を預けた。これより後は入出金をせず，税金は考慮しないものとする。

- (1) 10 年後に口座残高はいくらになっているか。
- (2) 残高が 150 万円を超えるのは何年後か。

なお， $1.03^{10} = 1.34$ ， $\log_{10} 1.03 = 0.0128$ ， $\log_{10} 15 = 1.176$ として計算すること。

6 数列

- 6.1 ある人が就職した記念に，毎年 10 万円の貯蓄をすることにした。年初に入金すると年末に 5% の利子が付くものとし，税金は無視してもよい。このような積立を 20 歳から 40 年間続けたとすると，40 年後の年末に貯蓄総額はいくらになるか。計算せよ。なお， $1.05^{40} = 7.04$ とすること。
- 6.2 ある人が貯金を始めた。1 日目に 100 円を，次の日からは前日の 10% 増しの金額を貯金箱に入れることにした。ただし，ここでは便宜上，小数点以下の値も貯金できるものとする。さて，これを続けると 30 日後にはいくらのお金が貯金箱の中に入っていることになるか。 $1.1^{30} = 17.45$ として計算せよ。
- 6.3 ある商店街に A から L までの 12 の店舗が並んでいる。いま，景気づけに A の店長が B で 100 万円の買い物をした。B の店長はそれを受けて，その 80% の金額を C で使った。C の店長は D でさらにその 80% の金額を使い，D の店長は E でその 80% を...，という流れが続いたとする。最後に L が A で買い物をし，このお祭り騒ぎは終わった。さて，この結果，商店街全体ではいくらの上昇が発生しただろうか。 $0.8^{12} = 0.07$ として計算せよ。

7 微分

- 7.1 あるブランド品を作っている企業がある。この企業が財を生産するのに，1 個あたり 16 の費用が必要であるとしよう。また，この企業が生産量を増やすと財の希少価値が落ちるため，生産量の増加に応じて

価格が下がるとする。その傾向は次の関数で表される。

$$p = 40 - 2x^{\frac{1}{3}}$$

- (1) この企業の利潤 (π) を生産量の関数として表せ。
- (2) この企業が現在 $x = 1000$ という生産をしている。この企業はここから生産量を増やすべきだろうか。
- (3) 利潤を最大にするには、生産量をいくつにすればよいか。

7.2 次の関数について、設問に答えよ。

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 7$$

- (1) $x = 3$ のとき、この関数は右上がりか、右下がりか。
- (2) この関数が極値をとるときの x の値を求めよ。

7.3 消費税の税率を t で表す。例えば税率が 5% なら $t = 0.05$ である。財の販売価格を p 、販売量を x とすると、政府の税収入 (T) は

$$T = p \times x \times t$$

と表される (例えば価格が 100 円、販売量が 4 個、税率が 5% なら、税額は $T = 100 \times 4 \times 0.05 = 20$ 円となる)。

一般に、税率が上がると消費が落ち込むと考えられる。ここではその関係が

$$x = 30 - 100t$$

であるとしよう。また、財の価格は $p = 10$ である。

- (1) 政府の税収を t の関数として表せ。
- (2) 税率が 5% ($t = 0.05$) のとき、税率の引き上げは税収の増加をもたらすか。
- (3) 税収を最大にするような税率 t はいくつか。計算せよ。

8 統計

8.1 下の表は、あるクラスの小テストの点数である。

名前	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
点数	7	4	3	6	3	6	8	5	2	7
名前	K	L	M	N	O	P	Q	S	T	U
点数	8	4	3	5	4	4	3	5	2	3

- (1) この結果を度数分布表にまとめ、ヒストグラムを描け。
 - (2) 平均点，メジアン，モードをそれぞれ求めよ。
 - (3) 分散，標準偏差を求めよ。
 - (4) A の偏差値はいくつか。計算せよ。
- 8.2 次の問題は、社団法人「日本数学会」が行った数学力テストの第一問目である。ここから、大学生の 24% が「平均」の意味を正しく理解していないことが判明し、その結果は新聞等でもセンセーショナルに報道された (2012 年 2 月 25 日)。さて、皆さんは正しく答えられるだろうか。

生徒 100 人の身長平均が 163.5cm だった。この結果から確実に正しいと言えることには ，そうでないものは×を付けなさい。

- (1) 身長が 163.5cm より高い生徒と低い生徒はそれぞれ 50 人ずついる。
- (2) 100 人全員の身長を足すと 16530cm になる。
- (3) 身長を 10cm ごとに区分けすると、「160cm 以上で 170cm 未満の生徒」が最も多い。

8.3 総務省の「家計調査」によると、2010 年度における二人以上世帯の貯蓄の平均値は 1657 万円であり、メジアンは 995 万円、モードは 100 万円未満であった。

- (1) 貯蓄額の分布に関するヒストグラムの形を想像せよ。
- (2) これらの値を見て、どのような感想を持ったか。

9 確率

9.1 ある人が 2 つの企業 (A, B) の株式購入を検討している。両企業の現在の株価はともに 300 であり、様々なデータを考慮すると、1 年後の株価は次のように予想される。

企業 A		企業 B	
予想株価	実現確率	予想株価	実現確率
600	10%	400	40%
320	50%	350	10%
200	40%	250	50%

- (1) 2 つの企業の株をとも同じ株数だけ購入し、1 年後に売却しよう。この人がトータルで損をする確率はいくつか。ただし、売買手数料等は考慮しなくて良い。
 - (2) あなたにとって、どちらの株が魅力的だろうか。検討せよ。
- 9.2 ある資格試験を受けようとしている人がいる。この試験の合格確率は 30% とあまり高くないが、合格すると 80% の確率で昇格するとされている。一方、不合格者が昇格する確率は 15% である。さて、この人が昇格できる確率はいくつか。