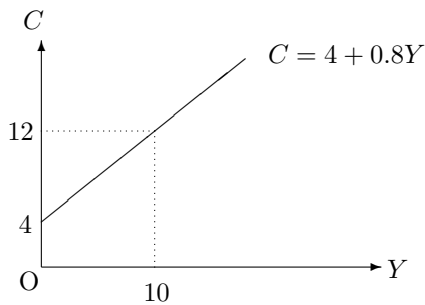


21 世紀 南山の経済学
「高校生のための数学入門」
解答

2 関数 (1)

2.1 (1) $C = 4 + 0.8Y$

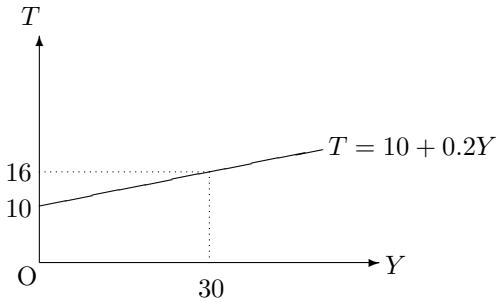
(2)



2.2

(1) $T = 10 + 0.2Y$

(2)



(3) (1) で求めた式に $Y = 100$ を代入して, $T = 30$ 。

(4) (1) で求めた式に $T = 60$ を代入して, $Y = 250$ 。

2.3 (1) 価格と販売量の関係を表す関数 (需要関数) を

$$x = ap + b$$

とおく。この式に $(p, x) = (100, 10)$ と $(p, x) = (80, 20)$ を代入して a と b を求めると $(a, b) = (-1/2, 60)$ となる。よって,

$$x = -\frac{1}{2}p + 60$$

(2) $p = 60$ を上の式に代入して, $x = 30$ 。

(3) $x = 25$ を上の式に代入して, $p = 70$ 。

3 関数 (2)

3.1 (1) $\pi = px - 10x$ 。ここに $p = 70 - 2x$ を代入して

$$\pi = -2x^2 + 60x$$

(2) 上の式を変形

$$\begin{aligned}\pi &= -2x^2 + 60x \\ &= -2(x - 15)^2 + 450\end{aligned}$$

よって, $x = 15$ の生産をすればよい。

なお, $\pi = -2x^2 + 60x$ を x について微分して,

$$\pi' = -4x + 60 = 0$$

ここから $x = 15$ を出すこともできます。

3.2 (1) $\pi = 20x - (x^2 + 2x)$ より,

$$\pi = -x^2 + 18x$$

(2) 上の式を変形する。

$$\begin{aligned}\pi &= -x^2 + 18x \\ &= -(x - 9)^2 + 81\end{aligned}$$

よって, $x = 9$ の生産をすればよい。

なお, $\pi = -x^2 + 18x$ を x について微分して,

$$\pi' = -2x + 18 = 0$$

ここから $x = 9$ を出すこともできます。

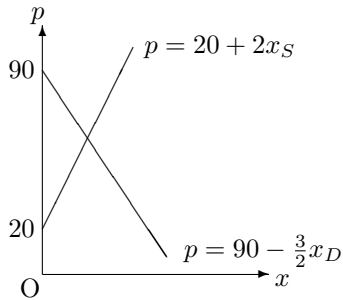
4 連立方程式

4.1 (1) 需要関数と供給関数をそれぞれ書き直すと

$$\text{需要: } p = 90 - \frac{3}{2}x_D$$

$$\text{供給: } p = 20 + 2x_S$$

となる。よって, 次のような図で表される。



- (2) $p = 72$ を需要関数, 供給関数にそれぞれ代入すると

$$x_D = 12$$

$$x_S = 26$$

需要よりも供給の方が多いので, 答えは「余る」

- (3) $x_D = x_S$ として次の連立方程式を解く。

$$x = 60 - \frac{1}{3}p$$

$$x = \frac{1}{2}p - 10$$

ここから $p = 60$ のとき, 需要と供給が一致する ($x_D = x_S = 20$) ことがわかる。

- 4.2 (1) 需要関数と供給関数をそれぞれ書き直すと

$$\text{需要} : p = 30 - 2x_D$$

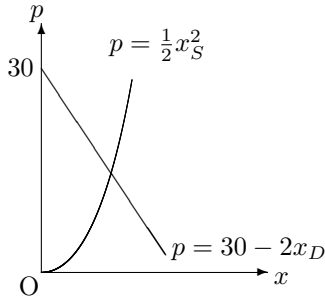
$$\text{供給} : p = \frac{1}{2}(x_S)^2$$

となる。よって, 次のような図で表される。

- (2) $p = 8$ を需要関数, 供給関数にそれぞれ代入すると

$$x_D = 11$$

$$x_S = 4$$



需要よりも供給の方が多いので，答えは「不足する」

(3) $x_D = x_S$ として次の連立方程式を解く。

$$x = 15 - \frac{1}{2}p$$

$$x = \sqrt{2p}$$

ここから方程式

$$p^2 - 68p + 900 = 0$$

が導出され，これは

$$(p + 50)(p - 18) = 0$$

と変形される。価格が負になることはない ($p > 0$) ので， $p = 18$ のとき，需要と供給が一致する ($x_D = x_S = 6$)。

なお， p を消去して x について解くこともできます。その方が因数分解は簡単です。

4.3 (1) 収入： $I = 300 + 12x$

支出： $E = 140 + 20x$

(2) $I = E$ となるような x を探せばよい。それぞれの関数を代入して

$$300 + 12x = 140 + 20x$$

これを解くと $x = 20$ を得る。つまり、支出が所得に追いつくのは 20 年後ということになる。

5 指数・対数

5.1 (1) $100 \times 1.07^{10} = 197$

- (2) n 年後に A 国の国民所得が B 国の国民所得を追い抜くとすると、次の不等式が成立する。

$$100 \times 1.07^n > 400 \times 1.01^n$$

これを解くと、

$$n > \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 1.07 - \log_{10} 1.01} = 23.99$$

を得る。よって、24 年後。

5.2 (1) $100 \times 1.03^{10} = 134$ 万円

- (2) n 年後に 150 万円を超えるとすると、次の不等式が成立する。

$$100 \times 1.03^n > 150$$

これを解いて、

$$n = \frac{\log_{10} 15 - \log_{10} 10}{\log_{10} 1.03} = 13.75$$

よって、14 年後。

6 数列

- 6.1 40 年目の年末における残高を S とすると、

$$S = 10 \times 1.05 + 10 \times 1.05^2 + \dots + 10 \times 1.05^{40}$$

となる。ブックレットで示された方法でこれを解くと

$$S = \frac{10 \times 1.05 \times (1.05^{40} - 1)}{0.05} = 1268.4$$

を得る。よって、1268.4 万円。

- 6.2 1 日目の貯金額が 100 円，2 日目が 100×1.1 円，3 日目が 100×1.1^2 円と考えると，30 日目までに入のお金は次のように表される。

$$S = 100 + 100 \times 1.1 + 100 \times 1.1^2 + \dots + 100 \times 1.1^{29}$$

これを解いて

$$S = \frac{100 \times (1.1^{30} - 1)}{0.1} = 16,450$$

となる。よって、16,450 円。

- 6.3 A の店長が 100 万円を使い，B の店長が 100×0.8 万円を使い，C の店長が 100×0.8^2 万円を使い...という流れの中で，L の店長までが使ったお金を計算すると，次のようになる。

$$S = 100 + 100 \times 0.8 + 100 \times 0.8^2 + \dots + 100 \times 0.8^{11}$$

これを計算して

$$S = \frac{100 \times (1 - 0.8^{12})}{0.2} = 465$$

よって、465 万円。

7 微分

7.1 (1) 利潤 = 売上 - 費用より

$$\begin{aligned}\pi(x) &= px - 16x \\ &= (40 - 2x^{\frac{1}{3}})x - 16x \\ &= -2x^{\frac{4}{3}} + 24x\end{aligned}$$

(2) π を x で微分する。

$$\pi'(x) = -\frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}} + 24$$

ここに $x = 1000$ を代入すると

$$\begin{aligned}\pi'(1000) &= -\frac{8}{3} \times 1000^{\frac{1}{3}} + 24 \\ &= -\frac{8}{3} < 0\end{aligned}$$

よって、生産を増やすべきではない。

(3) $\pi' = 0$ となる x を求める。ここから、

$$x = 729$$

を得る。

7.2 (1) $f(x)$ を微分すると $f'(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ を得る。これに $x = 3$ を代入すると

$$f(3) = 27 - 54 + 15 = -12 < 0$$

よって、この関数は $x = 3$ において右下がりである。

(2) $f'(x) = 0$ となるのは、 $x = 0, 1, 5$ のときである。

7.3 (1) $T = pxt$ に $p = 10$, $x = 30 - 100t$ を代入して ,

$$\begin{aligned} T &= 10(30 - 100t)t \\ &= 300t - 1000t^2 \end{aligned}$$

(2) 上の式を t について微分する。

$$T'(t) = 300 - 2000t$$

ここに $t = 0.05$ を代入

$$T(0.05) = 300 - 2000 \times 0.05 = 200 > 0$$

よって、税率の引き上げは税収入を増やすと考えられる。

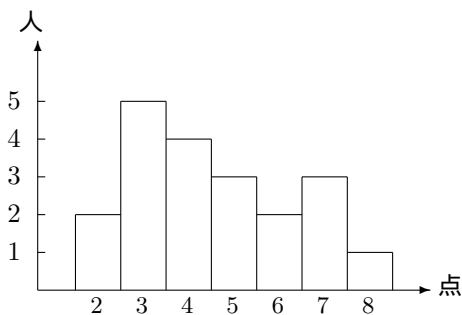
(3) $T'(t) = 0$ となるのは、 $t = 300/2000$, すなわち $t = 0.15$ のときである。よって、答えは 15%。

8 統計

8.1 (1) 度数分布表

点数	2点	3点	4点	5点	6点	7点	8点
人数	2人	5人	4人	3人	2人	2人	2人

ヒストグラム



- (2) 平均点 = 4.6 点, メジアン = 4 点, モード = 3 点
- (3) 分散 = 3.34, 標準偏差 = 1.83
- (4) A の偏差値 = 63.1

- 8.2 (1) はメジアン, (2) は平均値, (3) はモードについての問い。平均値とメジアン, あるいは平均値とモードは必ずしも一致しないので, (1)(3) は不適。平均値は

$$\text{平均値} = \frac{\text{データの合計}}{\text{データの数}}$$

と定義されるので, 平均身長 163.5cm の集団 100 人の身長合計は 16,350cm になる。よって (2) が正解。

ただしこの設問にはやや不備があって, 例えば 100 人の身長合計が 16,351cm でも 16,352cm でも平均値は 163.5cm と表されるかもしれない。つまりどこで四捨五入するかによって話が変わりうるので, 厳密には (2) が正解と言い切れないという言い方も可能ではある。

- 8.3 この問題については, 総務省の「家計調査」を自分で確認した上で, いろいろと考えてみてください。

9 確率

- 9.1 (1) 損をするのは次のいずれか。
- (a) A の株価が 320 で B の株価が 250 になるケース
 - (b) A の株価が 200 で B の株価が 350 か 250 になるケース
- (a) が起きる確率は, $0.5 \times 0.5 = 0.25$ なので 25%
- (b) が起きる確率は, $0.4 \times (0.1 + 0.5) = 0.24$ なので 24%
- よって, (a) と (b) のいずれかが起きる確率は 49%

- (2) A の株の期待値は 300, B の株の期待値は 320。期待値だけで見れば B の株の方が魅力的だが, A の株価は大きく上がる可能性がある。よって一か八かで A の株を買うという選択肢も単純に否定されるわけではない。

9.2 ある人が合格し, かつ昇進できる確率は

$$0.3 \times 0.8 = 0.24$$

なので, 24%。一方, 不合格となるが, その上で昇進できる確率は

$$0.7 \times 0.15 = 0.105$$

である。つまり, 10.5%。よって, この人が昇進できる確率は

$$0.24 + 0.105 = 0.345$$

となる。つまり, 答えは 34.5%。